✓ 125 – Sous espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

- On aime bien les sev stables pour la réduction d'endomorphismes (écrire matrice diagonale par blocs). On cherche à découper E en sev stables.
- Quels sont les sev stables d'un endomph ? Comment les trouver ? Quelles propriétés ont-ils ?
- Prérequis : réduction d'endomorphismes.

I) Propriétés de base sur les sous-espaces stables

1) Définition et endomorphisme induit

Déf : sev stable [BMP 158]

Ex : {0}, E, Ker(u), Im(u) [BMP 158]

Déf : endomorphisme induit [BMP 158] Matrice de u dans une base adaptée.

Csq : polynôme caractéristique de u est un multiple de celui de la restriction. Csq : si le poly caract de u est irred alors u n'admet pas de sous espace stable [BMP 159] *(réciproque vraie : P le poly caract. Si P=QR avec Q et R pee, on trouve des sev stables par le lemme des noyaux donc c'est pas possible. Donc P=Q^r. Par hyp, Ker(P)=E donc P est le poly min. l'espace cyclique engendré par un x non nul est donc de dimension inférieure à deg(P), et stable, donc c'est E tout entier. Donc u est cyclique, P=mu=Q irred [Boyer])*

Prop : si F et G sont u-stables, alors F+G et F∩G le sont aussi

2) Des exemples de sous espaces stables

Prop : endomorphismes commutant [BMP 159]

Déf : polynôme d'endomorphisme [BMP 159]

Prop : Im(P(u)) et Ker(P(u)) sont stables [BMP 159] *(se sert du lemme précédent)*

Csq : les sep et les sec sont stables.

Csq : si K=C, tout endomph admet une droite stable *(il existe forcément une valeur propre donc un vecteur propre)*

Ex : espace cyclique

3) Lemme des noyaux et CH

Prop : lemme des noyaux [BMP 163]

Cor : F u-stable, P annule F ; F est somme directe des Ker(Q_i(u))∩F [BMP 164]

Th : CH *(on se sert du fait qu'un ev cyclique est stable par u, et que le poly caract est le produit par blocs)*

Csq : on peut écrire E comme une somme directe de sous espaces caract.

Csq : si K=R, il existe forcément une droite ou plan stable [BMP 158] *(si u a une vp, il y a une droite stable. Sinon on écrit la décomp en sous espace caract, on prend un x non nul dans un Ker(P^r(u)) où P est irred de degré 2 : alors Vect(x,u(x)) est un plan stable)*

4) Dualité

Déf : $F^{\perp}$={f dans E* tq f s'annule sur F} [Gou 128]

Déf : ${}^{t}u$ (f)=fou [Gou 129]

Prop : F est stable par u ssi $F^{\perp}$ est stable par ${}^{t}u$ [Gou 130]+[BMP 159] *(sens direct ok, sens indirect chaud : on utilise qu'un ev de dim r est l'intersection des noyaux de n-f formes linéaires et après ça se fait. Application dans le th de trigonalisation)*

II) Réduction d'endomorphismes

1) Diagonalisation

On découpe l'espace en somme directe d'espaces propres

Th : A est diagonalisable ssi son poly minimal est simplement scindé [Gou 164] *(si A est diago, E est somme directe des sep, qui elle est égale au noyau du poly P=(X-l_1)…(X-l_r). Ce poly simplement scindé est annulateur donc le poly min est simple scindé. Si le poly min est simplement scindé, le lemme des noyaux permet de conclure)*

Cor : u diago et F u-stable => la restriction de u sur F est diago

Th : diagonalisation simultanée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent [Gou 171] *(appl de le prop des endomph qui commutent)*

Appl : GL_n et GL_m sont isomorphes ssi n=m [BMP 205] *(on montre qu'il existe des sg de GLn où tous les elts sont d'ordre 2, ils sont donc commutatif, diago, donc diago en base commune ; on mq le cardinal de ces groupes est inférieur à 2^n, et qu'il existe un tel groupe d'ordre 2^n etc.)*

2) Trigonalisation

Th : A est trigonalisable ssi son poly caract est scindé [Gou 163] *(une démo consiste à dire que le poly caract de A est le même que celui de tA, que comme il est scindé y'a une valeur propre donc un vecteur propre, donc il existe une droite de E* stable par tA, par le résultat sur la dualité, il existe un hyperplan de E stable par A, on conclut par HR)*

Cor : u trigo et F u-stable => la restriction de u sur F est trigo

Th : trigonalisation simultanée d'endomorphismes trigonalisables qui commutent [Gou 171] *(montrer par récurrence qu'il existe un vecteur propre commun à tous les f_i. Les applications transposées commutent et sont trigo donc ont un vecteur propre en commun dans E*, donc les f_i ont un hyperplan stable en commun dans E, on conclut par HR)*

3) Réduction de Dunford et Jordan

On suppose que le poly caract est scindé et on découpe l'espace en somme de SEC

Th : Dunford [Gou 193]

Th : Jordan [Gou 199] *(on commence par le montrer pour une matrice nilpotente, puis on le montre pour une matrice du genre k*Id+Nilp puis on recolle sur tous les SEC)*

4) Réduction de Frobenius

On découpe l'espace en somme de sous espaces cycliques

Th : invariants similitude [Gou 290]

III) Endomorphismes semi simples [Gou 224]

Sorte de généralisation de la notion de diagonalisabilité pour les corps non algébriquement clos.

Attention : on peut définir la semi simplicité de deux façons :

- *U semi simple si tout sev stable admet un suppl stable [BMP], [Gou].*
- *U semi simple s'il est diagonalisable dans une extension [Cog]*

La 2nd déf permet de bien voir ça comme une généralisation de la diago mais les preuves sont longues (Déf 1 => Déf 2 n'est pas trop dur, mais l'inverse l'est).

Déf : u est semi simple ssi tout sev stable par u admet un supplémentaire u-stable

Ex : une rotation du plan est semi simple mais pas diagonalisable dans R.

Th : u semi simple si son polynôme minimal est produit de polynômes unitaires distincts deux à deux *(pour le sens direct, on suppose mu=M²N, on mq MN(f)=0, contradiction. Pour l'autre sens, il faut montrer qu'un sev stable F est somme directe des E_i inter F, et que si mu est irred, alors f est semi simple (pas facile).)*

Csq :

- les matrices diagonalisables sont semi simples.
- les notions de diagonalisabilité et de semi-simplicité coïncident sur C.

Th : M matrice réelle. M est semi simple ssi elle est diago dans C *(Plus généralement, une matrice de Mn(K) est semi simple si elle est diagonalisable dans une extension L de K, à condition que K soit parfait je crois. Voir [Cog].) Y'a du boulot.*

Déf : matrice presque diagonale

Prop : A est semi simple sur R ssi elle est semblable dans R à une patrice p.d. *Encore du boulot*

Ex : isométries, antisymétries…

IV) Recherche de sous espaces stables

On cherche à expliciter les sev stables, ou tout au moins à avoir des informations qualitatives ou quantitatives sur ces espaces

1) Droites stables

Prop : u stabilise toutes les droites => u homothétie *(u(x)=kx, u(y)=ly, u(x+y)=mx+my=kx+ly donc k=m=l, u homothétie)*

Prop : si il y a un espace propre de dim plus grande que 2, ya une infinité de droites stables *(si le corps est infini)*

2) En dimension 3

Les sev stables de dim=1 sont les vecteurs propres. Les sev de dim 2 sont les orthogonaux des vecteurs propres de la transposée de u [BMP 196]

Exemple : [Cog 395]

3) Endomorphismes particuliers

a) *Diagonalisables* (changer de place dans le plan)

Prop : si u est diagonalisable. Soit F un sev propre. F est somme directe des F∩E_i, où E_i sont les sep. Donc tout sous espace stable de u est somme directe de F_i, où les F_i sont des sev des sep

Prop : u est diagonalisable ssi tout sous espace de E admet un supplémentaire stable par u [Cog 326] *(difficile. Sens indirect : tout hyperplan à une droite suppl stable donc u a tj un vect propre. Puis récurrence sur n pour mq u est diago. Sens direct : F un sev strict, (e_i) une base de vp de E, e_j un vp pas dans F, alors Ke_i est en somme directe avec F. On* *considère l'ensemble des dimensions des sev en SD avec F et stables par u ; il est non vide par ce qui précède, et majoré, donc on prend le max. On montre que F+cet espace maximal est E tout entier. Version plus simple : u diago ssi polynôme caract scindé et tout sev stable admet un suppl stable.)*

b) E euclidien ou hermitien

Ici on a une structure euclidienne ou hermitienne

Prop : u quelconque. Si F est stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u* [Gou 258]

Prop : Ker(u*)=(Imu)$^{\perp}$, Im(u*)=(Ker$u$)$^{\perp}$.

Csq : si u est normal, (Imu)$^{\perp}$ est stable par u. De même, l'orthogonal de tout sous espace propre de u est stable par u [Gou 258] *(vient du fait que si u et u* commutent, les sep de l'un sont stables par l'autre).*

Th : réduction des endomph normaux sur un ev hermitien. C'est en fait une CNS.

Th : réduction des endomph normaux sur un ev euclidien. C'est en fait une CNS. *On ne se sert pas de la réduction sur C pour trouver celle sur R.*

c) Cycliques

Prop : u est cyclique ssi le polynôme minimal et le polynôme caract sont égaux

Appl : u n'a pas de sev stable ssi le poly caract est irred *(sens direct : P le poly caract. Si P=QR avec Q et R pee, on trouve des sev stables par le lemme des noyaux donc c'est pas possible. Donc P=Q^r. Par hyp, Ker(P)=E donc P est le poly min. l'espace cyclique engendré par un x non nul est donc de dimension inférieure à deg(P), et stable, donc c'est E tout entier. Donc u est cyclique, P=mu=Q irred [Boyer])*

Déf : espace indécomposable [Cognet 380]

Prop : E est indécomposable ssi u est cyclique et le poly minimal est une puissance d'un poly irred [Cognet 380] *(sens direct : si P n'était pas primaire, le lemme des noyaux trouverait une décomposition. Par Frobenius, E se décompose comme somme directe de sev cycliques mais comme E est indécomp, il y en a qu'un seul, E est cyclique. Sens indirect : on decompe E en F+ G. Alors le pol min de u est le ppcm des pol min de u sur F et de u sur G, et est de la forme Q^m. Donc par ex, le pol min de u sur F est Q^m. u sur F est cyclique comme restriction d'un endo cyclique donc dimF=deg(Q)m, et dim E=deg(Q)m donc F=E)*

Prop : E admet un nb fini de sev stables ssi u cyclique. Dans ce cas, les sev stables sont les Ker(P(u)) où P est un diviseur unitaire du pol min (ou Im(P(u)) c'est la même chose) [Gob 109] *(difficile !!)*

Appl : sous espaces stables d'un bloc de Jordan *(un bloc de Jordan représente un endo cyclique)*

<u>Développements :</u>
Réduction des endomorphismes normaux [Gou Alg 258] (***)
Endomorphismes semi-simples [Gou Alg 224] (***)

<u>Pas mis :</u>
U diago ssi tout sev u stable a un supplémentaire u stable et poly caract scindé
U trigo ssi il existe un drapeau stable
Espaces stables des éléments de O(3)
Lie Kolchin

<u>Biblio :</u>
[Cog] Cognet
[Gob] Goblot
[BMP] Objectif agrégation
[Gou] Gourdon - Algèbre

<u>Rapport du Jury :</u>

Les candidats doivent s'être interrogés sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études de cas détaillées sont les bienvenues.

On constate une amélioration dans le traitement de cette leçon. Les conseils des années précédentes commencent à être compris. Toutefois les candidats mal préparés confondent cette leçon avec la leçon de réduction. Il est bien évident que cette leçon est difficile. Les candidats doivent savoir déterminer tous les sous-espaces stables d'une matrice 3 × 3 ou d'une matrice diagonalisable ou d'une matrice réduite à un seul bloc de Jordan. Comme signalé dans les rapports 2004 et 2005, c'est une leçon difficile, qui résiste mal à l'improvisation. Elle ne peut se réduire à la réduction !

Le jury a remarqué l'effort personnel fait par certains candidats pour éviter cet écueil.

Changer la fin du plan ?

II) Réduction

……

5) Normaux

III) Endomph particuliers

1) Semi-s
2) Cycliques